Hallar la inversa de la matriz A

Hallar

A^{-1}

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{A44}$$

Solución del ejercicio

Ya es sabido que toda matriz cuadrada tiene determinante, no obstante, no toda matriz posee inversa. Un teorema fundamental indica que si | A | <> 0 entonces A es invertible, es decir, si el determinante de una matriz es diferente a cero dicha matriz tendrá inversa.

La inversa se define como: $A^{-1} = A*B = B*A = I$

Donde, $A^{-1} = B$, o sea, la inversa de una matriz A es otra matriz B tal que A*B = I. La matriz identidad. Esto quiere decir que se puede usar una matriz ampliada con la matriz identidad y luego llevar la matriz de la izquierda a identidad a través de operaciones de reducción por renglones. Sin embargo, existen una formula genérica.

Por formula general, $A^{-1} = \frac{1}{|A|} * (Adjunta\ A)$

Entonces, para matrices de orden 4x4 se puede usar la formula general, donde

$$B = \begin{matrix} A11 & A12 & A13 & A14 \\ A21 & A22 & A23 & A24 \\ A31 & A32 & A33 & A34 \\ A41 & A42 & A43 & A44 \end{matrix} \qquad \text{y Adjunta A} = B^T$$

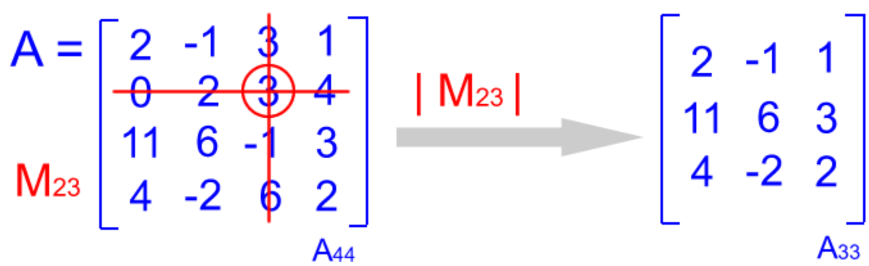
Es decir, B es la matriz de cofactores de la matriz original A y la traspuesta de esta matriz B es la adjunta de la matriz A.

Recuerde la definición de cofactor:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} |\ \mathbf{M_{ij}}\ |$$

Donde $\mathbf{M_{ij}}$ es la matriz menor o matriz interna del elemento (i, j). Esta matriz menor se calcula eliminando o cancelando la fila i y la columna j y dejando la matriz de los demás elementos. A continuación un ejemplo:

M_{23} =



Resumiendo, el cofactor es un valor *escalar* que se halla multiplicando el signo (+1 ó -1) por el determinante de la matriz menor de dicho elemento (i, j). Para el cálculo del signo simplemente se eleva la base (-1) al exponente (i+j) en caso de ser i+j par entonces el signo será positivo de lo contrario negativo.

Continuando con el ejercicio:

Para hallar A^{-1} Se proponen cuatro pasos a seguir:

1. Calcular el determinante de A. (recuerde que si el determinante es cero, entonces la matriz A no tendrá inversa).

2. Si el determinante es diferente de cero, entonces hallar la matriz B, es decir la matriz de cofactores de la matriz A.

3. Hallar la Adjunta de A, es decir la traspuesta de la matriz de cofactores B.

4. Aplicar la formula general: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} * (Adjunta\ A)$

Entonces, hallando el determinante **| A | = -2**

Como el determinante es diferente de cero entonces la matriz A si tiene inversa.
Continuemos calculando la matriz de cofactores.

$$\mathbf{A_{11}} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 * [\,(-1)^{1+1} * 1*(-2) - 1*(0) + 1*(0)\,] = -2$$

$\mathbf{A_{12}} = 2$	$\mathbf{A_{13}} = 0$	$\mathbf{A_{14}} = -2$	$\mathbf{A_{21}} = 0$	$\mathbf{A_{22}} = -2$
$\mathbf{A_{23}} = 0$	$\mathbf{A_{24}} = 2$	$\mathbf{A_{31}} = -1$	$\mathbf{A_{32}} = 1$	$\mathbf{A_{33}} = 1$
$\mathbf{A_{34}} = -3$	$\mathbf{A_{41}} = 1$	$\mathbf{A_{42}} = -1$	$\mathbf{A_{43}} = -1$	$\mathbf{A_{44}} = 1$

$$B = \begin{matrix} -2 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{matrix} \quad \text{Por ende, Adj A} = B^T = \begin{matrix} -2 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -3 & 1 \end{matrix}$$

Entonces:

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} * = \begin{matrix} -2 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -3 & 1 \end{matrix}$$

$$\mathbf{A^{-1}} = \begin{matrix} 1 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & 1 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ 1 & -1 & 3/2 & -1/2 \end{matrix}$$

☺ Puede verificar que

$$A * A^{-1} = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Puede repasar el cálculo de determinantes visitando: http://tutorias.co/tag/determinantes/